פתרון - מבחן במד"ר ח' –104131- סמסטר חורף תשע"ו– מועד א' 13.2.17

שאלה 1 (25 נק')

נתונה המשוואה $y^2 - y + xy' = 0$.

א) (7 נק') לכל אחד מהתנאים הבאים (בנפרד), קבעו האם למשוואה עם תנאי ההתחלה הנתון מובטח קיום פתרון יחיד. צטטו במדויק את המשפט עליו אתם מסתמכים.

(i) $y(0) = 0$ (ii) $y(0) = 1$ (iii) $y(1) = 0$

ב) (12 נק') מצאו פתרון כללי למשוואה.

ג) (6 נק') לכל אחד מהתנאים שבסעיף א' מצאו את כל הפתרונות למד"ר עם תנאי ההתחלה הנתון.

פתרון

א) לפי משפט קיום ויחידות למד"ר כללית מסדר ראשון $y' = F(x,y)$ עם תנאי $y(x_0) = y_0$:

אם הפונקציות $F(x,y),\quad F_y(x,y)$ רציפות במלבן $D = \{(x,y) | a < x < b, c < y < d\}$

ואם $(x_0, y_0) \in D$, אז למד"ר עם התנאי מובטח קיום פתרון יחיד המוגדר בסביבה כלשהי של נקודת ההתחלה.

ננרמל את המשוואה: $y' = \dfrac{y - y^2}{x}$.

הפונקציות: $F(x,y) = \dfrac{y - y^2}{x}, F_y(x,y) = \dfrac{1-2y}{x}$ רציפות בכל נקודה שבה $x \neq 0$.

(i) (ii) נקודת ההתחלה היא נקודת אי רציפות של הפונקציות F, F_y . לא נוכל למצוא מלבן D המכיל נקודה זו כך שהפונקציות רציפות ב D ולכן לא נוכל להבטיח קיום פתרון יחיד.

(iii) הפונקציות F, F_y רציפות רציפות במלבן: $D = \{(x,y) | 0 < x < \infty, -\infty < y < \infty\}$,

בנוסף $(1,0) \in D$ לכן מובטח קיום פתרון יחיד המוגדר בסביבת נקודה זו.

(iv) הפונקציות F, F_y רציפות רציפות במלבן: $D = \{(x,y) | 0 < x < \infty, -\infty < y < \infty\}$,

בנוסף $(1,1) \in D$ לכן מובטח קיום פתרון יחיד המוגדר בסביבת נקודה זו.

ב) דרך ראשונה משוואה פרידה:

נציג את המשוואה בצורה: $y^2 - y = -xy' \quad \Rightarrow \quad \dfrac{y^2 - y}{-x} = \dfrac{dy}{dx}$

נבצע הפרדת משתנים ע"י חלוקה בגורם: $\left(y^2 - y\right) = y\left(y-1\right)$.

נשים לב כי יתכן שנאבד פתרונות סינגולריים: $y(x) \equiv 0, \quad y(x) \equiv 1$

נקבל:

$$\int \frac{dx}{-x} = \int \frac{dy}{y^2 - y} \underset{\substack{\frac{1}{y(y-1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-1} \\ A(y-1)+By=1 \\ B=1,\ A=-1}}{=} \int \left(\frac{-1}{y} + \frac{1}{y-1} \right) dy \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -\ln|x| = -\ln|y| + \ln|y-1| + c \quad \Rightarrow \quad \ln\left|\frac{x(y-1)}{y}\right| = c \quad \Rightarrow \quad \frac{x(y-1)}{y} = \pm e^c$$

אם נצרף את הפתרון הסינגולרי $y(x) \equiv 1$ נוכל לסמן $k = \pm e^c, 0$ ולקבל

פתרון כללי בצורה סתומה: $\frac{x(y-1)}{y} = k$

בצורה מפורשת:

$$x(y-1) = ky \quad \Rightarrow \quad xy - x = ky \quad \Rightarrow \quad y(x-k) = x \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x}{x-k}$$

נסכם: פתרון כללי: $y = \frac{x}{x-k}$ או $y(x) \equiv 0$

דרך שניה משוואת ברנולי:

סידור: $y' - \frac{y}{x} = -\frac{y^2}{x}$

נחלק ב y^2 נשים לב לפתרון הסינגולרי $y(x) \equiv 0$

נקבל: $y^{-2} y' - \frac{y^{-1}}{x} = -\frac{1}{x}$

נגדיר: $v(x) = y(x)^{-1}$

נגזור: $v'(x) = -y^{-2} y'$

נציב: $-v' - \frac{1}{x} v = -\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad v' + \frac{1}{x} v = \frac{1}{x}$

גורם אינטגרציה: $\mu = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$

נקבל: $xv' + v = 1 \quad \Rightarrow \quad (xv)' = 1 \quad \Rightarrow \quad xv = x + c \quad \Rightarrow \quad v = \frac{x+c}{x}$

ובמשתנים המקוריים: $\frac{1}{y} = \frac{x+c}{x} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x}{x+c}$

פתרון כללי: $y = \frac{x}{x+c}$ או $y(x) \equiv 0$

דרך שלישית משוואות מדויקות:

נציג את המשוואה בצורה: $\left(y^2 - y\right) dx + x dy = 0$

נבדוק האם מדויקת: $M_y = \left(y^2 - y\right)_y = 2y - 1, \quad N_x = (x)_x = 1, \quad M_y \neq N_x$

המשוואה לא מדויקת.

כאשר יש גורם אינטגרציה התלוי רק במשתנה x מתקיים:

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x \Rightarrow \mu M_y = \mu N_x + \mu_x N \Rightarrow \frac{\mu_x}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{N}$$

כאשר יש גורם אינטגרציה התלוי רק במשתנה y מתקיים:

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x \Rightarrow \mu M_y + \mu_y M = \mu N_x \Rightarrow \frac{\mu_y}{\mu} = \frac{N_x - M_y}{M}$$

כאן: $\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{2y-2}{x} = \frac{2(y-1)}{x}$ לא תלוי רק במשתנה x

ואילו: $\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{2-2y}{y^2-y} = \frac{2(1-y)}{-y(1-y)} = \frac{-2}{y}$ אכן תלוי רק במשתנה y.

גורם האינטגרציה מקיים:

$$\frac{\mu_y}{\mu} = \frac{-2}{y} \Rightarrow \int \frac{\mu_y}{\mu} dy = \int \frac{-2}{y} dy \Rightarrow \ln|\mu| = -2\ln|y| = \ln|y^{-2}| \Rightarrow \mu = y^{-2}$$

נכפול בגורם האינטגרציה ונקבל משוואה מדויקת: $\left(1-\frac{1}{y}\right)dx + \frac{x}{y^2}dy = 0$.

נשים לב: כיוון שחילקנו את המשוואה ב y^2 יתכן ונאבד פתרון סינגולרי: $y(x) \equiv 0$.

בדיקה: $M_y = N_x = \frac{1}{y^2}$

נמצא את הפוטנציאל: $F = \int F_x dx = \int M(x,y)dx = \int \left(1-\frac{1}{y}\right)dx = \left(1-\frac{1}{y}\right)x + c(y)$

נגזור: $F_y = \frac{x}{y^2} + c'(y) = \frac{x}{y^2} \Rightarrow c'(y) = 0 \Rightarrow c(y) = const$

מסקנה: $F = \left(1-\frac{1}{y}\right)x + const$

הפתרון בצורה סתומה: $\left(1-\frac{1}{y}\right)x + const = 0$

נחלץ פתרון מפורש: $\left(1-\frac{1}{y}\right) = \frac{c}{x} \Rightarrow \frac{1}{y} = 1 - \frac{c}{x} = \frac{x-c}{x} \Rightarrow y = \frac{x}{x-c}$.

נסכם: פתרון כללי $y(x) = \frac{x}{x-c}$ או $y(x) \equiv 0$.

ג)

$y(x) = \frac{x}{x-c}$ או $y(x) \equiv 0$

(i) $y(0) = 0$ הפתרון הסינגולארי מתאים.

נבדוק אם יש פתרונות נוספים: $y(x) = \frac{x}{x-c} \Rightarrow 0 = \frac{0}{0-c}$

לכל קבוע המשוואה תתקיים.

למשוואה עם תנאי זה יש אינסוף פתרונות: $y(x)=\dfrac{x}{x-c}$.

(ii) $y(0)=1$ הפתרון הסינגולארי לא מתאים.

נבדוק אם יש פתרונות נוספים: $y(x)=\dfrac{x}{x-c} \quad \Rightarrow \quad 1=\dfrac{0}{0-c}$

המשוואה לא מתקיימת לאף קבוע.

למשוואה עם תנאי זה אין פתרון.

(iii) $y(1)=0$ הפתרון הסינגולארי מתאים ומובטח קיום פתרון יחיד.

הפתרון היחיד למשוואה עם תנאי זה הוא: $y(x)\equiv 0$.

<u>שאלה 2</u> (15 נק')

נתונה המשוואה $x^2y''-2y=0$.

א) (2 נק') הראו כי $y(x)=x^2$ מהווה פתרון למד"ר.

ב) (10 נק') מצאו פתרון כללי למד"ר.

ג) (3 נק') מצאו פתרון למד"ר המקיים את התנאים: $y(1)=0, \quad y'(1)=1$

<u>פתרון</u>

א) נגזור: $y=x^2, \quad y'=2x, \quad y''=2$

נציב: $x^2\,y''-y=2x^2-2x^2=0$ והמשוואה מתקיימת.

ב) דרך ראשונה הורדת סדר

נחפש פתרון שני ע"י הורדת סדר: $y=x^2v(x)$

נגזור: $y=x^2v(x), \quad y'=2xv+x^2v', \quad y''=2v+4xv'+x^2v''$

נציב: $x^2\left(2v+4xv'+x^2v''\right)-2x^2v=0$

נקבל: $x^2\left(4xv'+x^2v''\right)=0 \quad \Rightarrow \quad 4v'+xv''=0$

נסמן: $z=v'$ ונפתור: $xz'+4z=0$.

ע"י הפרדת משתנים: $\int\dfrac{dz}{z}=\int -4\dfrac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|z|=-4\ln|x|+c \quad \underset{c=0}{\Longrightarrow} \quad z=x^{-4}$

נקבל: $v'=x^{-4} \quad \Rightarrow \quad v=\dfrac{x^{-3}}{-3}+c \quad \underset{c=0}{\Longrightarrow} \quad v=\dfrac{1}{-3x^3}$

הפתרון השני: $y=x^2v=-\dfrac{1}{3x}$

פתרון כללי: $y=ax^2+b\left(-\dfrac{1}{3x}\right)$

נסדר: $y=c_1x^2+\dfrac{c_2}{x}$

דרך שניה נוסחת אבל

על פי נוסחת אבל הפתרון השני:

$$y_2(x)=y_1(x)\int\left(\frac{e^{\int -P(x)dx}}{y_1^{\,2}(x)}\right)dx=x^2\int\left(\frac{e^{\int -0dx}}{x^4}\right)dx=x^2\int\left(\frac{e^c}{x^4}\right)dx\underset{c=0}{=}$$

$$=x^2\int\left(\frac{1}{x^4}\right)dx=x^2\cdot\frac{x^{-3}}{-3}=-\frac{1}{3x}$$

פתרון כללי: $y=ax^2+b\left(-\frac{1}{3x}\right)$

נסדר: $y=c_1x^2+\frac{c_2}{x}$.

דרך שלישית משוואת אוילר (הצבה)

נציב $t=\ln x,\quad y(x)=v(t)$ (בהתאם לתחום בו נתון תנאי ההתחלה)

נגזור: $y'(x)=\frac{v'(t)}{x},\quad y''(x)=\frac{v''(t)}{x^2}-\frac{v'(t)}{x^2}$

נציב במד"ר: $v''-v'+2v=0$

פולינום אופיני: $r^2-r-2r=0$

שורשים: $r=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=2,-1$

פתרונות: $v_1=e^{-t},\quad v_2=e^{2t}$

ובמשתנים המקוריים:

$$y_1(x)=e^{-\ln x}=e^{\ln(x^{-1})}=x^{-1},\quad y_1(x)=e^{2\ln x}=e^{\ln(x^2)}=x^2$$

פתרון כללי: $y=c_1x^2+\frac{c_2}{x}$

ג)

נציב תנאי ראשון $0=y(1)=c_1+c_2$

נגזור כדי להציב תנאי שני: $y'=2c_1x-\frac{c_2}{x^2}$

נציב תנאי שני: $1=y'(1)=2c_1-c_2$

פתרון המשוואות שהתקבלו: $c_1=\frac{1}{3},\quad c_2=-\frac{1}{3}$

והפתרון המתקבל: $y=\frac{x^2}{3}-\frac{1}{3x}$.

<u>שאלה 3</u> (15 נק')

מצאו פתרון כללי למשוואה: $y''+9y=2x^2+2\cos^2 x$

<u>פתרון</u>

משוואה אופיינית: $r^2+9=0$, שורשים: $r=\pm 2i$

פתרון כללי למשוואה ההומוגנית: $y_h=c_1\sin(3x)+c_2\cos(3x)$

הפונקציה באגף ימין: $g(x)=2x^2+2\cos^2 x=2x^2+2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2x)\right)=2x^2+1+\cos(2x)$

המד"ר לכן: $y''+9y=2x^2+1+\cos(2x)$

נחפש פתרון פרטי מהצורה: $y_p=Ax^2+Bx+C+D\cos(2x)+E\sin(2x)$

נגזור: $y'_p=2Ax+B-2D\sin(2x)+2E\cos(2x)$

$$\boxed{y''_p=2A-4D\,cos(2x)-4E\,s\,in(2x)}$$

נציב במד"ר האי הומוגנית:

$$2A-4D\,cos\,2x-4E\,s\,in2x+9(Ax^2+Bx+C+D\,cos\,2x+E\,s\,in2x)$$
$$=2x^2+1+2cos2x$$

לכן הקבועים: $A=\frac{2}{9},\ B=0,\ C=\frac{5}{81},\ D=\frac{1}{5},\ E=0$

והפתרון הכללי למד"ר האי הומוגנית:

$$\boxed{y=c_1\,sin(3x)+c_2\,cos(3x)+\frac{2}{9}x^2+\frac{5}{81}+\frac{1}{5}cos(2x)}.$$

<u>שאלה 4 (15 נק')</u>

מצאו פתרון למערכת: $\vec{x}'=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\vec{x}$.

<u>פתרון</u>

נמצא ערכים עצמיים:

$$0=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&1\\1&1-\lambda&1\\1&1&1-\lambda\end{vmatrix}\underset{R_3-R_2\to R_3}{=}\begin{vmatrix}1-\lambda&1&1\\1&1-\lambda&1\\0&\lambda&-\lambda\end{vmatrix}\underset{C_3+C_2\to C_3}{=}\begin{vmatrix}1-\lambda&1&2\\1&1-\lambda&2-\lambda\\0&\lambda&0\end{vmatrix}$$

פיתוח לפי שורה שלישית נותן:

$$0=-\lambda\left((1-\lambda)(2-\lambda)-2\right)=-\lambda\left(2-3\lambda+\lambda^2-2\right)=-\lambda\left(\lambda^2-3\lambda\right)=-\lambda^2(\lambda-3)$$

ערכים עצמיים: $\lambda_1=0$ עם ריבוי אלגברי 2, $\lambda_2=3$ עם ריבוי אלגברי 1.

נמצא וקטורים עצמיים.

עבור $\lambda_1=0$ נפתור: $\begin{pmatrix}1-0&1&1\\1&1-0&1\\1&1&1-0\end{pmatrix}\vec{v}=0$

נקבל למעשה משוואה אחת: $x_1+x_2+x_3=0$

ולכן יש שני וקטורים עצמיים בלתי תלויים לינארית: $\vec{v}^1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad \vec{v}^2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

נקבל שני פתרונות: $\vec{x}^1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}e^{0\cdot t}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad \vec{x}^2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}e^{0\cdot t}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

עבור $\lambda_2=3$ נפתור: $\begin{pmatrix}1-3&1&1\\1&1-3&1\\1&1&1-3\end{pmatrix}\vec{v}=0$

נדרג:

$$\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[R_1\leftrightarrow R_3]{}\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{R_2-R_1\to R_2\\R_3+2R_1\to R_3}]{}\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&-3&3\\0&3&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3+R_2\to R_3]{}\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&-3&3\\0&0&0\end{pmatrix}$$

התקבלו 2 משוואות: $v_1+v_2-2v_3=0,\quad -3v_2+3v_3=0$

פתרון: $v_1=v_2=v_3$

וקטור עצמי: $\vec{v}^3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

פתרון שלישי: $\vec{x}^3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}e^{3t}$

פתרון כללי: $\vec{x}=c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}e^{3t}+c_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

<u>שאלה 5</u> (15 נק')

פתרו את המשוואה $\left(x^2+1\right)y''-4xy'+6y=0$ בעזרת טור חזקות.

א) (10 נק') מצאו נוסחא רקורסיבית למקדמים.
ב) (5 נק') מצאו את המקדמים באופן מפורש והציגו פתרון כללי.

<u>פתרון</u>

א) נניח כי הפתרון מקיים $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

נגזור: $y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}\ ,\ y''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)na_nx^{n-2}$

נציב במשוואה ונקבל:

$$\left(x^2+1\right)\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)na_nx^{n-2}-4x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+6\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)na_nx^{n}+\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)na_nx^{n-2}-4\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n}+6\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)na_nx^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(n+2\right)a_{n+2}x^{n}-4\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n}+6\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

$$2a_2+6a_3x-4a_1x+6a_0+6a_1x+\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)na_nx^{n}+\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)\left(n+2\right)a_{n+2}x^{n}-4\sum_{n=2}^{\infty}na_nx^{n}+6\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n=0$$

$$2a_2+6a_0+6a_3x+2a_1x+\sum_{n=2}^{\infty}\left((n-1)na_n-4na_n+6a_n+(n+1)\left(n+2\right)a_{n+2}\right)x^n=0$$

$$2a_2+6a_0=0 \quad\Rightarrow\quad a_2=-3a_0$$

$$6a_3+2a_1=0 \quad\Rightarrow\quad a_3=-\frac{1}{3}a_1$$

ועבור $n\ge 2$: $(n-1)na_n-4na_n+6a_n+(n+1)\left(n+2\right)a_{n+2}=0$

ולכן לכל $n\ge 2$: $a_{n+2}=\dfrac{(n-2)(n-3)a_n}{(n+1)(n+2)}$

ב) $n=2 \quad\Rightarrow\quad a_{2+2}=\dfrac{(2-2)(2-3)a_2}{(2+1)(2+2)} \quad\Rightarrow\quad a_4=0$

$$n=3 \quad\Rightarrow\quad a_{3+2}=\frac{(3-2)(3-3)a_2}{(3+1)(3+2)} \quad\Rightarrow\quad a_5=0$$

$$n=4 \quad\Rightarrow\quad a_{4+2}=\frac{(4-2)(4-3)a_4}{(4+1)(4+2)}=\frac{2\cdot 0}{30} \quad\Rightarrow\quad a_6=0$$

נקבל: $a_n=0$ לכל $n\ge 4$.

הפתרון:

$$y(x)=a_0+a_1x-3a_0x^2-\frac{1}{3}a_1x^3=a_0(1-3x^2)+a_1\left(x-\frac{1}{3}x^3\right)$$

<u>שאלה 6</u> (15 נק')

פתרו את המד"ר הבאה בעזרת התמרת לפלס עבור $t\ge 0$.

$$y''+2y'+2y=e^{-t}, \quad y(0)=y'(0)=0$$

<u>פתרון</u>

נפעיל התמרת לפלאס על שני האגפים, מהלינאריות:

$$L\left[y''\right]+2L\left[y'\right]+2L\left[y\right]=L\left[e^{-x}\right]$$

ממשפט התמרה של נגזרת:

$$s^2L\left[y\right]-sy(0)-y'(0)+2\left(sL\left[y\right]-y(0)\right)+2L\left[y\right]=L\left[e^{-x}\right]$$

$$s^2L\left[y\right]+2sL\left[y\right]+2L\left[y\right]=\frac{1}{1+s}$$

נקבל: $L\left[y\right]=\frac{1}{(1+s)(s^2+2s+2)}=\frac{A}{(1+s)}+\frac{Bs+C}{(s^2+2s+2)}\underset{\substack{A=1\\B=-1\\C=-1}}{=}\frac{1}{(1+s)}-\frac{s+1}{(s^2+2s+2)}$

ולכן: $L\left[y\right]=\frac{1}{1+s}-\frac{s+1}{(s+1)^2+1}$

וההתמרה ההפוכה: $y(x)=e^{-x}-e^{-x}\cos x$